Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1907.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg).

Изслѣдованіе замѣчательнаго случая зависимыхъ испытаній.

А. А. Маркова.

(Доложено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 14 февраля 1907 г.).

Случай зависимыхъ испытаній, которому посвящено это изслѣдованіе, первоначально былъ найденъ мною только въ качествѣ одного изъ примѣровъ[1]) распространенія на зависимыя величины закона большихъ чиселъ, установленнаго Чебышевымъ въ мемуарѣ[2]) «О среднихъ величинахъ» для независимыхъ величинъ.

Для распространенія упомянутаго закона я воспользовался способомъ Чебышева, требующимъ разсмотрѣнія только математическаго ожиданія квадрата извѣстной суммы.

Разсматривая затѣмъ математическія ожиданія различныхъ степеней той же суммы, я убѣдился, что въ данномъ случаѣ оправдываются тѣ же предѣльныя формулы, какія выведены Чебышевымъ для случая независимыхъ величинъ въ мемуарѣ «О двухъ теоремахъ относительно вѣроятностей»[3]) и послужили ему для вывода предѣльной величины вѣроятности въ видѣ извѣстнаго интеграла[4]).

---

1) Извѣстія физико-математическаго общества при Казанскомъ Университетѣ. Вторая Серія, Т. XV, № 4. «Распространеніе закона большихъ чиселъ на величины, зависящія другъ отъ друга».

2) Сочиненія П. Л. Чебышева. Т. I, стр. 688—694.

3) Сочиненія Чебышева. Т. II, стр. 481—492.

4) См. статью Чебышева «О предѣльныхъ величинахъ интеграловъ» въ первомъ томѣ и рядъ статей во второмъ томѣ его сочиненій, а также мою диссертацію «О нѣкоторыхъ приложеніяхъ алгебраическихъ непрерывныхъ дробей» и замѣтку «Sur les racines de l'équation $e^{x^2}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}=0$», помѣщенную въ Bulletin de l'Académie des Sciences de St-Pétersbourg (T. IX, № 5).

Такимъ образомъ оказывается, что нашъ случай доставляетъ примѣръ, и насколько мнѣ извѣстно первый примѣръ, зависимыхъ величинъ, относительно которыхъ, какъ относительно независимыхъ величинъ, мы можемъ доказать, что извѣстный интегралъ Лапласа, при безпредѣльномъ возрастаніи ихъ числа, служитъ предѣломъ вѣроятности суммѣ ихъ заключаться въ установленныхъ границахъ.

Я не стану, конечно, излагать всѣхъ произведенныхъ мною вычисленій, которыя привели меня къ опредѣленному заключенію, а изложу доказательство правильности моего заключенія, выведеннаго, можно сказать, экспериментальнымъ путемъ.

§ 1. Мы будемъ разсматривать вопросъ о числѣ появленій нѣкотораго событія E при извѣстномъ числѣ послѣдовательныхъ испытаній, связанныхъ между собой такимъ образомъ, что выполняются слѣдующія условія:

1) вѣроятность событія E при каждомъ изъ этихъ испытаній имѣетъ одну и ту же величину p, пока результаты ихъ вообще остаются неопредѣленными;

2) вѣроятность событія E при каждомъ испытаніи имѣетъ вторую опредѣленную величину p_1, если результаты послѣдующихъ испытаній остаются неопредѣленными, а непосредственно предшествующее испытаніе привело къ событію E, каковы бы ни были результаты прочихъ испытаній;

3) наконецъ вѣроятность событія E при каждомъ испытаніи имѣетъ третью величину p_2, если результаты послѣдующихъ испытаній остаются неопредѣленными, а непосредственно предшествующее испытаніе не привело къ событію E, каковы бы ни были результаты прочихъ испытаній.

Какъ видно, каждое испытаніе связано у насъ съ непосредственно предшествующимъ ему испытаніемъ и оказывается независимымъ отъ остальныхъ предшествующихъ ему испытаній, коль скоро извѣстенъ результатъ непосредственно предшествующаго испытанія.

Вмѣстѣ съ событіемъ E мы будемъ разсматривать и противоположное ему событіе F, вѣроятности котораго, при соотвѣтствующихъ условіяхъ, равныя

$$1-p,\ 1-p_1,\ 1-p_2,$$

мы для краткости обозначимъ символами

$$q,\ q_1,\ q_2.$$

Введеніе такихъ лишнихъ символовъ послужитъ для значительнаго упрощенія нашихъ вычисленій и разсужденій; такъ какъ наши выводы будутъ одинаково относиться, какъ къ событію E, такъ и къ событію F, и потому наши окончательныя формулы будутъ симметричны относительно p и q.

Относительно чиселъ p, p_1, p_2 важно замѣтить, что только два изъ нихъ можно задавать произвольно, а не всѣ три, такъ какъ они связаны однимъ соотношеніемъ

$$p = pp_1 + qp_2 \qquad (1),$$

которое мы легко получаемъ, опредѣляя вѣроятность событія E при каждомъ испытаніи по возможнымъ результатамъ предыдущаго испытанія.

Въ нашихъ вычисленіяхъ шесть чиселъ

$$p,\ p_1,\ p_2,\ q,\ q_1,\ q_2$$

мы сведемъ къ тремъ

$$p,\ q,\ \delta,$$

опредѣляя δ формулою

$$\delta = p_1 - p_2 \qquad (2).$$

Соотношеніе (1) въ силу равенствъ

$$q = 1 - p, \quad q_1 = 1 - p_1, \quad q_2 = 1 - p_2 \qquad (3)$$

доставляетъ намъ такія простыя формулы

$$\begin{aligned} p_1 &= p + \delta q, & q_1 &= q - \delta q \\ p_2 &= p - \delta p, & q_2 &= q + \delta p \end{aligned} \qquad (4).$$

Обращаясь къ нашему вопросу, прежде всего займемся разысканіемъ производящей функціи для вѣроятности событію E, въ n разсматриваемыхъ нами испытаній, появиться опредѣленное число разъ.

Для этой цѣли введемъ еще слѣдующія обозначенія.

Пусть

$$P_{m,k}$$

означаетъ вѣроятность, что въ первыя k испытаній событіе E появится ровно m разъ; пусть далѣе

$$P^{\circ}_{m,k} \quad \text{и} \quad P'_{m,k}$$

означаютъ такія же вѣроятности какъ $P_{m,k}$, но при добавочномъ условіи, которое для $P^{\circ}_{m,k}$ состоитъ въ томъ, что E не появляется при $k^{\text{-мъ}}$ испытаніи, а для $P'_{m,k}$ состоитъ напротивъ въ томъ, что E имѣетъ мѣсто при $k^{\text{-мъ}}$ испытаніи; такъ что

$$P_{m,k} = P^{\circ}_{m,k} + P'_{m,k} \tag{5}$$

Введя затѣмъ произвольное число ξ, станемъ разсматривать три функціи его

$$\varphi_k = \Sigma P^{\circ}_{m,k}\, \xi^m, \quad \psi_k = \Sigma P'_{m,k}\, \xi^m, \quad \omega_k = \Sigma P_{m,k}\, \xi^m \tag{6},$$

которыя въ силу равенства (5) связаны простою формулою

$$\omega_k = \varphi_k + \psi_k \tag{7}.$$

При такихъ обозначеніяхъ, переходя отъ k испытаній къ $k+1$ испытаніямъ, мы можемъ установить, на основаніи теоремъ о сложеніи и умноженіи вѣроятностей слѣдующія формулы

$$\begin{aligned} P^{\circ}_{m,k+1} &= q_1\, P'_{m,k} + q_2\, P^{\circ}_{m,k} \\ P'_{m,k+1} &= p_1\, P'_{m-1,k} + p_2\, P^{\circ}_{m-1,k} \end{aligned} \tag{8},$$

въ силу которыхъ имѣемъ

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1} &= q_1 \psi_k + q_2 \varphi_k \\ \psi_{k+1} &= p_1 \xi \psi_k + p_2 \xi \varphi_k \end{aligned} \tag{9}.$$

А изъ уравненій (9), посредствомъ исключенія одной изъ функцій φ или ψ, нетрудно получить для обѣихъ этихъ функцій совершенно одинаковыя уравненія

$$\varphi_{k+2} - (p_1\xi + q_2)\,\varphi_{k+1} + (p_1 - p_2)\,\xi\varphi_k = 0,$$

$$\psi_{k+2} - (p_1\xi + q_2)\,\psi_{k+1} + (p_1 - p_2)\,\xi\psi_k = 0,$$

изъ которыхъ посредствомъ сложенія выводимъ

$$\omega_{k+2} - (p_1\xi + q_2)\,\omega_{k+1} + (p_1 - p_2)\,\xi\omega_k = 0 \qquad (10).$$

Слѣдовательно, если мы введемъ новое произвольное число t и положимъ

$$\Omega(\xi, t) = \omega_0 + \omega_1 t + \omega_2 t^3 + \omega_3 t^3 + \ldots . \qquad (11),$$

опредѣляя ω_0 равенствомъ

$$\omega_2 - (p_1\xi + q_2)\,\omega_1 + (p_1 - p_2)\,\xi\omega_0 = 0 \qquad (12),$$

то должно быть

$$\Omega(\xi, t) = \frac{L_0 + L_1 t}{1 - (p_1\xi + q_2)\,t + (p_1 - p_2)\,\xi t^2},$$

$$L_0 = \omega_0 \quad \text{и} \quad L_1 = \omega_1 - (p_1\xi + q_2)\,\omega_0 .$$

Съ другой стороны, имѣемъ

$$\omega_1 = p\xi + q, \quad \omega_2 = pp_1\xi^2 + (pq_1 + qp_2)\,\xi + qq_2$$

и изъ уравненія (12) находимъ

$$\omega_0 = 1,$$

откуда выводимъ

$$L_0 = 1 \quad \text{и} \quad L_1 = (p - p_1)\,\xi + q - q_2$$

Подставляя эти величины L_0 и L_1 въ указанное выраженіе $\Omega(\xi, t)$ и принимая во вниманіе формулы (4), мы приходимъ наконецъ къ равенству

$$\Omega(\xi, t) = \frac{1 - \delta\,(q\xi + p)\,t}{1 - \{p\xi + q + \delta\,(q\xi + p)\}\,t + \delta\xi t^2} \qquad (13),$$

которое можетъ служить для опредѣленія функціи ω_n.

§ 2. Найденное выраженіе $\Omega(\xi, t)$ послужитъ намъ для разысканія математическаго ожиданія различныхъ степеней числа появленій событія E при n испытаніяхъ.

Другими словами, обозначая число появленій событія E при n испытаніяхъ буквою m, мы воспользуемся равенствомъ (13) для вычисленія суммъ

$$\Sigma\, m^k\, P_{m,n},$$

при различныхъ значеніяхъ k; а затѣмъ отъ этихъ суммъ перейдемъ къ суммамъ вида

$$\Sigma\, (m - pn)^k\, P_{m,n},$$

представляющимъ математическія ожиданія степеней разности $m - pn$, гдѣ pn равно математическому ожиданію числа m.

Для намѣченной цѣли прежде всего замѣтимъ, что математическое ожиданіе произведенія

$$m\,(m-1)\ldots(m-i+1)$$

равно значенію производной

$$\frac{d^i\,\omega_n}{d\,\xi^n}$$

при $\xi = 1$ и, слѣдовательно, можетъ быть опредѣлено какъ значеніе коэффиціента при t^n въ разложеніи по степенямъ произвольнаго числа t производной

$$\frac{d^i\,\Omega\,(\xi, t)}{d\,\xi^i}$$

при $\xi = 1$.

Составляя эту производную и полагая въ ней $\xi = 1$, получаемъ

$$\left\{\frac{d^i\,\Omega\,(\xi,t)}{d\,\xi^i}\right\}_{\xi=1} = \frac{1.2\ldots i\,p\,t^i}{(1-t)^2}\left\{\frac{p}{1-t} + \frac{\delta q}{1-\delta t}\right\}^{i-1} \qquad (14).$$

Отсюда при небольшихъ значеніяхъ i получаемъ довольно простые результаты; такъ, полагая

$$i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

находимъ

мат. ожид. $m = np$,

мат. ож. $m\,(m-1) = n\,(n-1)\,p^2 + 2pq\delta\,(n-1+(n-2)\,\delta+(n-3)\,\delta^2+\ldots)$

мат. ож. $m\,(m-1)\,(m-2) = n\,(n-1)\,(n-2)\,p^3 +$
$+ 6p^2q\delta\,((n-1)\,(n-2)+(n-2)\,(n-3)\,\delta+\ldots)$
$+ 6pq^2\delta^2\,(n-2+2\,(n-3)\,\delta+3\,(n-4)\,\delta^2+\ldots)$

мат. ож. $m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3) = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,p^4$
$+ 12p^3q\delta\,((n-1)\,(n-2)\,(n-3)$
$+(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,\delta+\ldots)$
$+ 36p^2q^2\delta^2\,((n-2)\,(n-3)$
$+ 2\,(n-3)\,(n-4)\,\delta+\ldots)$
$+ 24pq^3\delta^3\,(n-3+3\,(n-4)\,\delta$
$+ 6\,(n-5)\,\delta^2+\ldots)$

Изъ формулы (14) нетрудно, конечно, вывести и общее выраженіе для математическаго ожиданія произведенія

$$m\,(m-1)\ldots(m-i+1);$$

но для нашей цѣли нѣтъ надобности выписывать это выраженіе во всей полнотѣ, а важно разсмотрѣть только его составныя части и выдѣлить изъ нихъ тѣ члены, которые будутъ играть рѣшающую роль въ нашихъ окончательныхъ выводахъ.

Функція

$$\left\{\frac{d^i\,\Omega\,(\xi, t)}{d\xi^i}\right\}_{\xi=1}$$

числа t, въ которой намъ надо найти коэффиціентъ при t^n, на основаніи формулы (14) разлагается на слагаемыя вида

$$\frac{(i-1)\,(i-2)\ldots(i-j)}{1.2\ldots.j}\cdot\frac{1.2\ldots i\,p^{i-j}\,(\delta q)^j\,t^i}{(1-t)^{i-j+1}\,(1-\delta t)^j}.$$

Разлагая же дробь

$$\frac{t^i}{(1-t)^{i-j+1}\,(1-\delta t)^j}$$

въ рядъ по возрастающимъ степенямъ t, находимъ, что въ этомъ ряду коэффиціентъ при t^n можно представить суммою

$$\frac{(n-j)(n-j-1)\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots(i-j)} + j\delta\frac{(n-j-1)(n-j-2)\ldots(n-i)}{1.2\ldots.(i-j)} +$$

$$+ \frac{j(j+1)}{1.2}\delta^2\frac{(n-j-2)(n-j-3)\ldots(n-i-1)}{1.2\ldots(i-j)} + \ldots\ldots,$$

которая должна быть остановлена на членахъ равныхъ нулю; прибавляя нѣсколько членовъ равныхъ нулю, мы можемъ, не измѣняя результата, продолжить ее до члена, гдѣ δ входитъ въ степени $n-j$, такъ что наша сумма будетъ состоять изъ $n-j$ членовъ.

Разсматривая затѣмъ эти члены, мы замѣчаемъ въ нихъ произведенія вида

$$(n-j-\lambda)(n-j-\lambda-1)\ldots(n-i-\lambda+1),$$

которыя приводятся къ многочленамъ, расположеннымъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ числа n.

На этомъ основаніи и вся сумма можетъ быть представлена въ видѣ многочлена

$$C_0 n^{i-j} + C_1 n^{i-j-1} + C_2 n^{i-j-2} + \ldots + C_{i-j} \qquad (15),$$

коэффиціенты котораго выражаются суммами первыхъ $n-j$ членовъ безконечныхъ рядовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ числа δ и независящихъ отъ n.

И не трудно убѣдиться, что при $\delta^2 < 1$ всѣ эти ряды должны быть сходящимися; другія же значенія δ^2 исключаются существомъ нашей задачи, ибо они приводятъ къ вѣроятностямъ выходящимъ изъ предѣловъ 0 и 1.

Изъ всѣхъ коэффиціентовъ

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\ \ldots\ldots$$

для главной цѣли нашего изслѣдованія важенъ только первый, для котораго не трудно установить условную формулу

$$1.2\ldots(i-j)\,C_0 = (1-\delta)^{-j} \qquad (16),$$

гдѣ вмѣсто извѣстнаго безконечнаго ряда, въ который разлагается $(1-\delta)^{-j}$, должно взять только сумму первыхъ $n-j$ его членовъ.

Формула (16) ясно обнаруживаетъ предѣлъ, къ которому приближается C_0, когда n возрастаетъ безпредѣльно.

Такимъ образомъ математическое ожиданіе разсматриваемаго произведенія

$$m\,(m-1)\ldots(m-i+1)$$

можно представить въ видѣ многочлена, расположеннаго по цѣлымъ положительнымъ степенямъ числа n.

Коэффиціенты этого многочлена получаются изъ безконечныхъ рядовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ числа δ и независящихъ отъ n, посредствомъ отбрасыванія всѣхъ членовъ, гдѣ степень δ больше $n-1$; такъ что остаются у насъ только тѣ члены, гдѣ степень δ не больше $n-1$.

Вмѣстѣ съ тѣмъ не трудно замѣтить, что нашъ многочленъ, выражающій математическое ожиданіе произведенія

$$m\,(m-1)\ldots(m-i+1),$$

содержитъ p и q только въ цѣлыхъ положительныхъ степеняхъ и что сумма степеней p и q во всѣхъ его членахъ равна i, степень же p не меньше степени n.

Наконецъ, если мы исключимъ изъ него всѣ члены, гдѣ степень n ниже степени p, а оставшуюся часть, гдѣ n и p входятъ только въ одинаковыхъ степеняхъ, обозначимъ символомъ

$$[(m,i)]_0,$$

то на основаніи вышеприведенныхъ вычисленій можемъ установить формулу [1])

$$[(m,i)]_0 = (np)^i + i(i-1)\frac{\delta q}{1-\delta}(np)^{i-1} + \frac{i(i-1)^2(i-2)}{1.2}\left(\frac{\delta q}{1-\delta}\right)^2(np)^{i-2} \tag{17}$$
$$\ldots + \frac{i(i-1)^2(i-2)^2\ldots(i-j+1)^2(i-j)}{1.2\ldots j}\left(\frac{\delta q}{1-\delta}\right)^j(np)^{i-j} + \ldots$$

1) Мы не принимаемъ во вниманіе равенства $p+q=1$; если же принять его во вниманіе, то въ формулѣ (17) всѣ степени q надо замѣнить единицей.

помня, что правую часть нашей формулы надо разложить въ рядъ по степенямъ δ и въ этомъ ряду слѣдуетъ удержать только тѣ члены, гдѣ степень δ не больше $n-1$.

Полученными результатами можно воспользоваться для нахожденія математическаго ожиданія различныхъ степеней числа m, для чего нужно только степени m выразить черезъ произведенія разсмотрѣннаго вида по формулѣ

$$m^i = m(m-1)\ldots(m-i+1) + A_{1,i}\, m(m-1)\ldots(m-i+2) + \ldots$$
$$+ \ldots + A_{j,i}\, m(m-1)\ldots(m-i+j+1) + \ldots. \qquad (18),$$

коэффиціенты которой

$$A_{1,i},\ A_{2,i},\ \ldots.,\ A_{i-1,i}$$

не зависятъ отъ m и вполнѣ опредѣляются своими значками[1]).

Для вычисленія коэффиціентовъ $A_{j,i}$ можно воспользоваться равенствами

$$A_{1,i} = \frac{i(i-1)}{2}, \quad A_{j,j} = 0$$
$$A_{j,i+1} = A_{j,i} + (i-j+1)\, A_{j-1,i} \qquad (19),$$

изъ которыхъ послѣдовательно находимъ

$A_{1,2} = 1$
$A_{1,3} = 3, \quad A_{2,3} = 1$
$A_{1,4} = 6, \quad A_{2,4} = 7, \quad A_{3,4} = 1$
$A_{1,5} = 10, \quad A_{2,5} = 25, \quad A_{3,5} = 15, \quad A_{4,5} = 1$
$A_{1,6} = 15, \quad A_{2,6} = 65, \quad A_{3,6} = 90, \quad A_{4,6} = 31, \quad A_{5,6} = 1$
$A_{1,7} = 21, \quad A_{2,7} = 140, \quad A_{3,7} = 350, \quad A_{4,7} = 301, \quad A_{5,7} = 63, \quad A_{6,7} = 1$
$A_{1,8} = 28, \quad A_{2,8} = 266, \quad A_{3,8} = 1050, \quad A_{4,8} = 1701, \quad A_{5,8} = 966, \quad A_{6,8} = 127, \quad A_{7,8} = 1$
. . . . . .

изъ тѣхъ же равенствъ (19) нетрудно заключить о существованіи формулы вида

$$A_{j,i} = \frac{i(i-1)\ldots(i-j)}{2.4\ldots 2j}\,(i^{j-1} + \alpha i^{j-2} + \beta i^{j-3} + \ldots) \qquad (20),$$

гдѣ $\alpha, \beta, \ldots.$ не зависятъ отъ i.

---

1) Тѣ же коэффиціенты $A_{j,i}$ входятъ въ формулу

$$\frac{d^i f(e^x)}{dx^i} = e^{xi} f^{(i)}(e^x) + A_{1,i}\, e^{(i-1)x} f^{(i-1)}(e^x) + A_{2,i}\, e^{(i-2)x} f^{(i-2)}(e^x) + \ldots$$

Формулой (20) мы опредѣлимъ и тѣ значенія $A_{j,i}$, которыхъ нѣтъ въ формулѣ (18); а именно намъ важно ввести количества

$$A_{j,0},\ A_{j,1},\ A_{j,2},\ \ldots,\ A_{j,j-1},\ A_{j,j}$$

равныя нулю, согласно формулѣ (20).

На основаніи формулы (18) и нашихъ заключеній, относящихся къ математическому ожиданію произведеній вида

$$m\,(m-1)\ldots(m-i+1),$$

мы можемъ высказать, относительно математическаго ожиданія степени m^i, слѣдующія положенія.

Математическое ожиданіе степени m^i можно представить въ видѣ многочлена, расположеннаго по цѣлымъ положительнымъ степенямъ числа n.

Коэффиціенты этого многочлена получаются изъ сходящихся безконечныхъ рядовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ числа δ и независящихъ отъ n, посредствомъ отбрасыванія всѣхъ членовъ, гдѣ степень δ больше $n-1$.

Числа p и q входятъ въ этотъ многочленъ только въ цѣлыхъ положительныхъ степеняхъ, при чемъ сумма степеней p и q во всѣхъ членахъ не больше i, степень же p не меньше степени n.

Наконецъ, если мы исключимъ изъ него всѣ члены, гдѣ степень n ниже степени p, а оставшуюся часть, гдѣ n и p входятъ только въ одинаковыхъ степеняхъ, обозначимъ символомъ

$$[m^i]_0,$$

то на основаніи формулъ (17) и (18) получимъ

$$\begin{aligned}
[m^i]_0 = {} & \\
& (np)^i + A_{1,i}\,(np)^{i-1} + A_{2,i}\,(np)^{i-2} + \ldots . \\
& + \{i\,(i-1)\,(np)^{i-1} + A_{1,i}\,(i-1)\,(i-2)\,(np)^{i-2} + \ldots\}\,\frac{\delta q}{1-\delta} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left\{\begin{array}{l} \dfrac{i\,(i-1)^2\ldots(i-j+1)^2\,(i-j)}{1.2\ldots j}\,(np)^{i-j} + \\ A_{1,i}\,\dfrac{(i-1)\,(i-2)^2\ldots(i-j)^2\,(i-j-1)}{1.2\ldots . j}\,(np)^{i-j-1} + \ldots . \end{array}\right\}\left(\frac{\delta q}{1-\delta}\right)^j \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \qquad (21);$$

формула (21) имѣетъ, конечно, такой же условный смыслъ какъ и (17).

§ 3. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію математическаго ожиданія различныхъ степеней разности

$$m - pn.$$

Въ силу формулы

$$(m - pn)^k = m^k - km^{k-1}\, pn + \frac{k\,(k-1)}{1.2}\, m^{k-2}\,(pn)^2 + \ldots . \qquad (22)$$

мы можемъ воспользоваться, для намѣченной цѣли, выводами предыдущаго параграфа.

Такимъ образомъ легко обнаружить, что математическое ожиданіе

$$(m - pn)^k$$

можно представить въ видѣ многочлена

$$R_k^{(k)}\, n^k + R^{(k)}_{k-1}\, n^{k-1} + \ldots . + R_i^{(k)}\, n^i + \ldots . \qquad (23),$$

коэффиціенты котораго

$$R_k^{(k)},\ R^{(k)}_{k-1}, \ldots . ,\ R_i^{(k)}, \ldots .$$

цѣлыя функціи количествъ p, q, δ и получаются изъ сходящихся безконечныхъ рядовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ числа δ и независящихъ отъ n, посредствомъ отбрасыванія всѣхъ членовъ, гдѣ степень δ больше $n - 1$.

Вмѣстѣ съ тѣмъ указанныя нами вычисленія обнаруживаютъ, что функція $R_i^{(k)}$ содержитъ множитель p^i и что сумма показателей p и q во всѣхъ членахъ этой функціи не больше k.

Къ выраженію математическаго ожиданія $(m - pn)^k$ въ видѣ многочлена (23) мы пришли путемъ опредѣленныхъ вычисленій.

Для дальнѣйшихъ выводовъ важно замѣтить, что всѣ коэффиціенты выраженія (23) должны остаться безъ измѣненія, если мы придемъ къ нему другимъ путемъ, сохраняя только вышеуказанное условіе, въ силу котораго эти коэффиціенты получаются изъ безконечныхъ рядовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ δ и независящихъ отъ n, посредствомъ отбрасыванія всѣхъ членовъ, гдѣ степень δ больше $n - 1$.

Мы придемъ другимъ путемъ къ тому же выраженію (23) математическаго ожиданія $(m - pn)^k$, разсматривая вмѣсто числа появленій событія E число появленій событія F.

Для выполненія указаннаго перехода отъ E къ F слѣдуетъ только вмѣсто m взять $n - m$ и, согласно формуламъ (4), замѣнить p на q и обратно q на p.

Такимъ образомъ вмѣсто разности

$$m - pn$$

мы получимъ разность

$$n - m - qn,$$

которая отличается отъ $m - pn$ только знакомъ $\pm$; ибо ихъ сумма равна нулю.

А потому четныя степени этихъ разностей одинаковы, нечетныя же отличаются только знакомъ $\pm$.

Отсюда слѣдуетъ, что при четномъ k можно безъ измѣненія найденнаго нами выраженія математическаго ожиданія степени

$$(m - pn)^k$$

переставить въ немъ p съ q; при нечетномъ же k такая перестановка измѣняетъ только знакъ $\pm$ этого выраженія.

И въ силу сдѣланнаго нами замѣчанія, о независимости выраженія (23) отъ способа вычисленія, можемъ заключить, что при перестановкѣ p съ q функція $R_i^{(k)}$ остается безъ измѣненія, если k четное, и мѣняетъ только знакъ $\pm$, если k нечетное.

Поэтому, обнаруживъ въ функціи $R_i^{(k)}$ множитель p^i, мы можемъ утверждать, что эта функція должна содержать и множитель q^i, въ явномъ видѣ или въ видѣ выраженія къ нему приводящагося на основаніи равенства $p + q = 1$.

Слѣдовательно, если функція $R_i^{(k)}$ не приводится къ нулю, то она должна содержать такіе члены, для которыхъ сумма степеней p и q не меньше $2i$.

А такъ какъ $R_i^{(k)}$, по доказанному состоитъ только изъ такихъ членовъ, гдѣ сумма степеней p и q не больше k, то должно быть

$$2i \leqq k \qquad (24),$$

если только $R_i^{(k)}$ не приводится къ нулю.

Неравенство (24) указываетъ, что въ выраженіи (23), для математическаго ожиданія степени

$$(m - pn)^k,$$

не можетъ быть степеней n, превосходящихъ $\frac{k}{2}$; такъ что при k равномъ нечетному числу $2l-1$ должно быть

$$R_{2l-1}^{(2l-1)} = R_{2l-2}^{(2l-1)} = \ldots = R_{l}^{(2l-1)} = 0$$

а при k равномъ четному числу $2l$ должно быть

$$R_{2l}^{(2l)} = R_{2l-1}^{(2l)} = \ldots = R_{l+1}^{(2l)} = 0,$$

въ силу чего имѣемъ

$$\underset{n=\infty}{\text{предѣлъ мат. ожид.}} \left(\frac{m-np}{\sqrt{n}}\right)^{2l-1} = 0 \qquad (25)$$

и

$$\underset{n=\infty}{\text{предѣлъ мат. ожид.}} \left(\frac{m-np}{\sqrt{n}}\right)^{2l} = \underset{n=\infty}{\text{пред.}} R_l^{(2l)} \qquad (26).$$

Количество $R_l^{(2l)}$, на основаніи приведенныхъ нами формулъ, представляется въ видѣ такой суммы

$$a_0 p^l + a_1 p^l q + a_2 p^l q^2 + \ldots + a_{l-1} p^l q^{l-1} + a_l p^l q^l$$
$$+ b_0 p^{l+1} + b_1 p^{l+1} q + b_2 p^{l+1} q^2 + \ldots + b_{l-1} p^{l+1} q^{l-1}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

коэффиціенты которой не зависятъ отъ p и q.

А эта сумма легко опредѣляется по первой строкѣ

$$a_0 p^l + a_1 p^l q + a_2 p^l q^2 + \ldots + a_l p^l q^l,$$

на томъ основаніи, что она не измѣняется отъ перестановки p съ q.

Въ самомъ дѣлѣ прибавляя множители

$$(1-p)^l,\ (1-p)^{l-1}, \ldots,\ 1-p,\ 1$$

мы изъ суммы

$$a_0 p^l + a_1 p^l q + \ldots + a_{l-1} p^l q^{l-1} + a_l p^l q^l$$

получаемъ сумму

$$S = a_0 p^l (1-p)^l + a_1 p^l (1-p)^{l-1} q + \ldots + a_l p^l q^l \qquad (27),$$

которая равна

$$(a_0 + a_1 + \ldots + a_l)\, p^l q^l$$

и также не измѣняется отъ перестановки p съ q.

Поэтому перестановка p съ q не измѣняетъ разности

$$R_l^{(2l)} - S;$$

а такъ какъ въ этой разности обнаруживается множитель p^{l+1}, то она можетъ отличаться отъ нуля только въ томъ случаѣ, если она содержитъ и множитель q^{l+1}, въ явномъ видѣ или въ видѣ выраженія приводящагося къ нему въ силу равенства $p + q = 1$, что невозможно, ибо въ ней сумма показателей p и q не больше $2l$.

Слѣдовательно

$$R_l^{(2l)} - S = 0$$

и мы можемъ написать формулу

$$R_l^{(2l)} = (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_l)\, p^l q^l \qquad (28),$$

помня, что сумма

$$a_0 p^l + a_1 p^l q + a_2 p^l q^2 + \ldots + a_l p^l q^l$$

служитъ коэффиціентомъ при n^l въ томъ выраженіи, которое получается, согласно нашимъ формуламъ, изъ математическаго ожиданія

$$(m - pn)^{2l},$$

если мы оставимъ въ немъ только тѣ члены, гдѣ n и p входятъ въ одинаковыхъ степеняхъ.

Обозначая это новое выраженіе символомъ

$$[(m - pn)^{2l}]_0$$

и сохраняя обозначенія предыдущаго параграфа находимъ

$$[(m-pn)^{2l}]_0 = [m^{2l}]_0 - \frac{2l}{1} pn\,[m^{2l-1}]_0 + \frac{2l\,(2l-1)}{1.2}\,[m^{2l-2}]_0 - \ldots$$

Затѣмъ для полученія искомаго коэффиціента

$$a_0 p^l + a_1 p^l q + a_2 p^l q^2 + \ldots + a_l p^l q^l$$

остается только внести въ послѣднюю формулу выраженія

$$[m^{2l}]_0,\ [m^{2l-1}]_0,\ [m^{2l-2}]_0, \ldots$$

которыя даетъ намъ формула (21) и собрать тѣ члены, гдѣ n входитъ въ степени l.

Такимъ образомъ опредѣляются величины

$$a_0,\ a_1, \ldots,\ a_l;$$

именно не трудно придти къ общей формулѣ

$$\begin{aligned} a_j : \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^j = {} & \frac{(l+j)\,(l+j-1)^2 \ldots (l+1)^2\, l}{1.2 \ldots j}\, A_{l-j,\,2l} \\ & - \frac{2l}{1}\,\frac{(l+j-1)\,(l+j-2)^2 \ldots l^2\,(l-1)}{1.2 \ldots j}\, A_{l-j,\,2l-1} \\ & + \frac{2l\,(2l-1)}{1.2}\,\frac{(l+j-2)\,(l+j-3)^2 \ldots (l-1)^2\,(l-2)}{1.2 \ldots j}\, A_{l-j,\,2l-2} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \pm \frac{2l\,(2l-1) \ldots (l+2)}{1\ 2 \ldots (l-1)}\,\frac{(j+1)\,j^2\,(j-1)^2 \ldots 2^2 . 1}{1\ 2 \ldots j}\, A_{l-j,\,l+1}, \end{aligned}$$

а изъ нея, принимая во вниманіе формулу (20), выводимъ *)

$$\begin{aligned} a_j &= \Delta^{2l}_{x=0}\,\frac{(x+j-l)\,(x+j-l-1)^2 \ldots (x-l+1)^2\,(x-l)}{1.2 \ldots j}\, A_{l-j,\,x} \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^j \\ &= \Delta^{2l}\,\frac{x^{2l}}{1.2 \ldots j . 2.4 \ldots 2\,(l-j)} \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^j \\ &= \frac{l\,(l-1) \ldots (l-j+1)}{1.2 \ldots j}\ 1.3.5 \ldots (2l-1) \left(\frac{2\delta}{1-\delta}\right)^j \end{aligned}$$

---

*) $\Delta^k{}_{x=0}\, f(x) = f(k) - \frac{k}{1} f(k-1) + \frac{k\,(k-1)}{1.2} f(k-2) - \ldots \pm f(0).$

и слѣдовательно

$$a_0 + a_1 + a_2 \ldots + a_l = 1.3.5\ldots.(2l-1)\left(1+\frac{2\delta}{1-\delta}\right)^l \qquad (29).$$

Послѣднія формулы, конечно, имѣютъ такой же условный смыслъ, какъ и (16): безконечные ряды, расположенные по возрастающимъ степенямъ δ, должно замѣнять соотвѣтствующими конечными суммами.

Формула (29) дастъ намъ предѣлъ, къ которому приближается сумма

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_l,$$

когда n возрастаетъ безпредѣльно; принимая же во вниманіе формулу (28), получаемъ

$$\underset{n=\infty}{\text{предѣлъ}}\ R_l^{(2l)} = 1.3.5\ldots.(2l-1)\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\,pq\right)^l$$

и слѣдовательно

$$\underset{n=\infty}{\text{предѣлъ мат. ож.}}\left(\frac{m-pn}{\sqrt{n}}\right)^{2l} = 1.3.5\ldots(2l-1)\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\,pq\right)^l \qquad (30).$$

Итакъ имѣемъ

$$\underset{n=\infty}{\text{пред. мат. ожид.}}\left(\frac{m-pn}{\sqrt{n}}\right)^{2l-1} = 0$$

и

$$\underset{n=\infty}{\text{пред. мат. ожид.}}\left(\frac{m-pn}{\sqrt{n}}\right)^{2l} = 1.3.5\ldots(2l-1)\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\,pq\right)^l$$

и на основаніи вышеупомянутыхъ изслѣдованій можемъ утверждать, что *вѣроятность неравенствъ*

$$np + t_1\sqrt{2pq\,\frac{1+\delta}{1-\delta}\,n} < m < np + t_2\sqrt{2pq\,\frac{1+\delta}{1-\delta}\,n},$$

гдѣ n число нашихъ испытаній и m число появленій событія E, должна приближаться къ предѣлу равному

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2}\,dt,$$

если при неизмѣнныхъ

$$p,\ q,\ t_1,\ t_2,\ \delta$$

число n будетъ возрастать безпредѣльно.

§ 4. Разсмотрѣнный мною вопросъ допускаетъ значительное обобщеніе, на которое обратилъ мое вниманіе академикъ А. М. Ляпуновъ.

А именно, при сохраненіи прочихъ условій, можно предположить, что вѣроятность событія E при каждомъ отдѣльномъ испытаніи, пока результаты ихъ вообще остаются неопредѣленными, не сохраняетъ одинаковой величины для всѣхъ испытаній, а зависитъ отъ мѣста испытанія.

Введя сообразно этому въ наши вычисленія новыя величины

$$p', p'', \ldots, p^{(n)}, \ldots$$

означающія вѣроятности E при послѣдовательныхъ испытаніяхъ, вмѣсто (1) получаемъ уравненіе

$$p^{(n)} = p_1 p^{(n-1)} + p_2 (1 - p^{(n-1)}) \qquad (31),$$

которое при нашихъ обозначеніяхъ разрѣшается формулою

$$p^{(n)} = p + (p' - p)\, \delta^{n-1} \qquad (32).$$

При такомъ обобщеніи вопроса введенная нами величина p будетъ служить только предѣломъ для $p^{(n)}$, при безпредѣльномъ возрастаніи значка n.

Затѣмъ не трудно видѣть, что мы можемъ ввести всѣ обозначенія, которыми пользовались раньше, и можемъ для функціи ω_n, коэффиціенты которой равны вѣроятностямъ событію E, въ n испытаній, появиться опредѣленное число разъ, составить прежнее уравненіе второго порядка

$$\omega_{k+2} - (p_1 \xi + q_2)\, \omega_{k+1} + (p_1 - p_2)\, \xi\, \omega_k = 0.$$

Что же касается функціи $\Omega(\xi, t)$, то для обобщеннаго вопроса она будетъ отличаться отъ той, съ которой мы имѣли дѣло раньше, только числителемъ; а для полученія новаго числителя изъ прежняго надо измѣнить только выраженіе ω_1, равное теперь не $p\xi + q$ а $p'\xi + q'$.

Такимъ образомъ къ найденной раньше функціи $\Omega(\xi, t)$ придется, для указаннаго обобщенія вопроса, прибавить функцію $\Delta(\xi, t)$ опредѣляемую формулою

$$\Delta(\xi, t) = \frac{(p' - p)(\xi - 1)\, t}{1 - \{p\xi + q + \delta(q\xi + p)\}\, t + \delta \xi t^2} \qquad (33).$$

По приращенію функціи $\Omega(\xi, t)$ не трудно уже найти и соотвѣтствующія приращенія разсматриваемыхъ нами математическихъ ожиданій; такъ

какъ эти приращенія опредѣляются тѣми же формулами, какъ и сами математическія ожиданія, только функцію $\Omega(\xi, t)$ надо замѣнить ея приращеніемъ $\Delta(\xi, t)$.

И прежде всего приращеніе математическаго ожиданія произведенія

$$m(m-1)\ldots(m-i+1)$$

опредѣляется какъ коэффиціентъ при t^n въ разложеніи по возрастающимъ степенямъ t значенія производной

$$\frac{d^i \Delta(\xi, t)}{d\xi^i}$$

при $\xi = 1$; въ силу же формулы (33) имѣемъ

$$\left\{\frac{d^i \Delta(\xi,t)}{d\xi^i}\right\}_{\xi=1} = \frac{1.2\ldots i(p'-p)t^i}{(1-t)(1-\delta t)}\left\{\frac{p}{1-t}+\frac{\delta q}{1-\delta t}\right\}^{i-1} \qquad (34).$$

Отсюда не трудно заключить, что приращеніе математическаго ожиданія произведенія

$$m(m-1)\ldots(m-i+1)$$

можно представить подобно самому математическому ожиданію, въ видѣ многочлена, расположеннаго по степенямъ числа n, и что, по выдѣленіи общаго множителя $p'-p$, во всѣхъ членахъ этого многочлена число p будетъ входить въ степеняхъ не меньшихъ, чѣмъ число n, сумма же степеней p и q будетъ равна $i-1$.

Поэтому въ приращеніи математическаго ожиданія

$$(m-pn)^k$$

также явно долженъ обнаруживаться множитель $p'-p$ и, по выдѣленіи его, степень p во всѣхъ членахъ будетъ не меньше степени n, сумма же степеней p и q не больше $k-1$.

Съ другой стороны указанный нами переходъ отъ E къ F обнаруживаетъ, что при одновременной замѣнѣ

$$p \text{ на } q,\ q \text{ на } p \quad \text{и} \quad p' \text{ на } q' = 1-p$$

разсматриваемое нами приращеніе математическаго ожиданія

$$(m - pn)^k$$

должно оставаться совершенно неизмѣннымъ, или можетъ перемѣнить только знакъ $\pm$.

На этомъ основаніи, разсуждая подобно прежнему, нетрудно уже заключить, что приращеніе математическаго ожиданія

$$(m - pn)^k$$

можетъ содержать только такіе члены, отношеніе которыхъ къ $n^{\frac{k}{2}}$ имѣетъ предѣломъ нуль, когда n возрастаетъ безпредѣльно.

Слѣдовательно обобщеніе нашего вопроса, указанное академикомъ А. М. Ляпуновымъ, не измѣняетъ найденныхъ нами предѣловъ математическихъ ожиданій

$$\left(\frac{m - pn}{\sqrt{n}}\right)^{2l-1} \quad \text{и} \quad \left(\frac{m - pn}{\sqrt{n}}\right)^{2l}$$

при безпредѣльномъ возрастаніи числа n; а потому остается въ силѣ и приведенное выше предложеніе о предѣлѣ вѣроятности числу появленій событія E заключаться въ указанныхъ границахъ.